

DS 3

Option informatique, deuxième année

Julien REICHERT

Durée : 4 heures.

Questions de cours

Question 0.1 : Montrer que pour tout automate déterministe, il existe un automate déterministe émondé et un automate déterministe complet reconnaissant le même langage.

Question 0.2 : D'ailleurs, quelle est la complexité de la construction de l'automate équivalent dans les deux cas ? On suppose que l'automate est représenté en utilisant une bonne structure de données (laquelle ?).

Question 0.3 : Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un langage rationnel soit reconnaissable par un automate déterministe complet émondé.

Exercice 1

Soit Σ un alphabet fini. Soit $u \in \Sigma^*$. Un mot $v \in \Sigma^*$ est un préfixe de u lorsqu'il existe $w \in \Sigma^*$ tel que $u = vw$, et sous les mêmes conditions on dit que w est un suffixe de u . Pour cet exercice, on pose $\Sigma = \{a, b\}$ et $u = baabbaa$.

Question 1.1 : Dresser la liste des préfixes de u ainsi que celle de ses suffixes.

Question 1.2 : Représenter graphiquement un automate déterministe reconnaissant exactement l'ensemble des préfixes de u .

Question 1.3 : Représenter graphiquement un automate non-déterministe *simple* reconnaissant exactement l'ensemble des suffixes de u . Représenter ensuite graphiquement le résultat de l'algorithme de déterminisation sur l'automate obtenu à la question précédente.

Exercice 2

Vous participez à un concours de mathématiques comportant une partie de raisonnement logique. Plusieurs orateurs font des déclarations et vous devez répondre à des questions en vous appuyant sur des informations déduites de ces déclarations. La règle suivante s'applique : « Les orateurs sont de trois natures : les véridiques, les menteurs et les changeants. Les véridiques disent toujours la vérité, les menteurs mentent toujours, et les changeants disent en alternance une vérité et un mensonge (c'est-à-dire, soit une vérité, puis un mensonge, puis une vérité, etc. ; soit un mensonge, puis une vérité, puis un mensonge, etc.). Pendant tout le concours, les orateurs ne peuvent pas changer de nature. »

Les épreuves comportent deux phases :

- Les différents orateurs font plusieurs déclarations dont l'analyse permet de déterminer la nature de chaque orateur (véridique, menteur, changeant commençant par dire la vérité, ou changeant commençant par dire un mensonge).
- Les orateurs font une seconde série de déclarations. Puis, vous devez répondre à des questions en exploitant les informations contenues dans ces déclarations.

Question 2.1 : Dans la première phase, quel est le nombre minimum de déclarations que doit faire chaque orateur pour qu'il soit possible de déterminer sa nature? Justifier.

Question 2.2 : Soit un orateur A qui fait une suite de n déclarations A_i . Proposer des formules du calcul des propositions A_V , A_M , A_{CV} et A_{CM} qui permettent de caractériser la nature de A (respectivement véridique, menteur, changeant commençant par dire la vérité, ou changeant commençant par dire un mensonge).

Vous participez à une première épreuve avec un orateur A qui fait les déclarations suivantes :

- J'aime le rouge mais pas le bleu.
- Soit j'aime le rouge, soit j'aime le vert.
- Si j'aime le rouge et le vert, alors j'aime le bleu.

Nous noterons R , V et B les variables propositionnelles associées au fait que l'orateur aime le rouge, le vert ou le bleu. Nous noterons A_1 , A_2 et A_3 les formules propositionnelles associées aux déclarations de A .

Question 2.3 : Représenter les déclarations de l'orateur sous la forme de formules du calcul des propositions A_1 , A_2 et A_3 dépendant des variables R , V et B .

Question 2.4 : Appliquer les formules permettant de caractériser la nature des orateurs proposées pour la question 2.2 pour l'orateur A dépendant des variables A_1 , A_2 et A_3 .

Question 2.5 : En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité, par exemple), déterminer la nature de l'orateur A . Quelles sont les couleurs qu'aime A ?

Vous participez à une seconde épreuve avec trois orateurs G , H et I . Vous avez déterminé dans la première phase avec succès que G est un menteur, que H est un véridique et que I est un changeant sans savoir s'il doit dire la vérité ou un mensonge pour sa déclaration suivante. Ceux-ci font les déclarations :

- I : Le losange est visible
- G : Le cercle n'est visible que si le losange est visible.
- I : Le triangle n'est pas visible.
- H : Soit le cercle est visible, soit le triangle est visible.

Nous noterons G_1 , H_1 , I_1 et I_2 les formules propositionnelles associées aux déclarations des orateurs dans cette épreuve. Nous noterons C , L et T les variables propositionnelles associées au fait que le cercle, le losange ou le triangle soit visible.

Question 2.6 : Représenter les déclarations des orateurs sous la forme de formules du calcul des propositions G_1 , H_1 , I_1 et I_2 dépendant des variables C , L et T .

Question 2.7 : Représenter les informations sur la nature des orateurs sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des variables G_1 , H_1 , I_1 et I_2 .

Question 2.8 : En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formules de De Morgan, par exemple), déterminer quelle est (ou quelles sont) la (ou les) figure(s) visible(s) ainsi que la nature exacte de l'orateur changeant I .

Exercice 3

Nous utiliserons ici les notations usuelles du cours.

Soit $\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ l'extension de δ définie pour tout $q \in Q$, pour tout $a \in \Sigma$ et pour tout $w \in \Sigma^*$ par $\delta^*(q, \varepsilon) = q$ et $\delta^*(q, wa) = \delta(\delta^*(q, w), a)$.

Question 3.1 : Donner, sans les justifier, deux expressions régulières ou ensemblistes représentant les langages sur $\Sigma = \{a, b\}$ reconnus par les automates \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 dont la description figure ci-après.

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, A, \{C\}, \delta_1)$, avec $Q_1 = \{A, B, C\}$ et :

- $\delta(A, a) = B$;
- $\delta(B, a) = C$;
- $\delta(C, a) = C$;
- $\delta(A, b) = A$;
- $\delta(B, b) = A$;
- $\delta(C, b) = C$.

$\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, D, \{E\}, \delta_2)$, avec $Q_2 = \{D, E, F\}$ et :

- $\delta(D, a) = E$;
- $\delta(E, a) = E$;
- $\delta(F, a) = F$;
- $\delta(D, b) = F$;
- $\delta(E, b) = F$.
- $\delta(F, b) = F$;

Soit l'opération interne \oplus sur les automates finis complets déterministes (avec les notations intuitives) définie par :

$$\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, (i_1, i_2), F_1 \times (Q_2 \setminus F_2) \cup (Q_1 \setminus F_1) \times F_2, \delta)$$

avec $\forall q_1 \in Q_1, \forall q_2 \in Q_2, \forall a \in \Sigma, \delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$.

Question 3.2 : Construire l'émondé de l'automate $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ en reprenant les exemples précédents.

Question 3.3 : Caractériser le langage reconnu par cet automate par une expression régulière ou ensembliste.

Question 3.4 : Montrer que : si \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont des automates finis complets déterministes alors $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ est un automate fini complet déterministe.

Question 3.5 : Montrer que

$$\forall m \in \Sigma^*, \forall o_1, d_1 \in Q_1, \forall o_2, d_2 \in Q_2, \delta^*((o_1, o_2), m) = (d_1, d_2) \Leftrightarrow \delta_1^*(o_1, m) = d_1 \wedge \delta_2^*(o_2, m) = d_2.$$

Question 3.6 : Soient \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 des automates finis complets déterministes, montrer que :

$$m \in L(\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2) \Leftrightarrow (m \in L(\mathcal{A}_1) \wedge m \notin L(\mathcal{A}_2)) \vee (m \in L(\mathcal{A}_2) \wedge m \notin L(\mathcal{A}_1)).$$

Question 3.7 : Quelle relation liant les langages reconnus par les automates \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 et $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ peut-on en déduire ?

Exercice 4

On utilise les notations usuelles du cours, ainsi que les notations $|w|$ pour représenter la longueur du mot w et $|w|_a$ pour représenter le nombre d'occurrences de la lettre a dans w . On considère dans cet exercice l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Soit f une application quelconque définie sur \mathbb{N} et à valeurs dans \mathbb{N} . On note $L(f)$ l'ensemble des mots u appartenant à Σ^* vérifiant l'égalité $|u|_a = f(|u|_b)$.

Question 4.1 : On considère la fonction f_1 définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, f_1(n) = 2$. Dessiner un automate reconnaissant le langage $L(f_1)$.

On considère la fonction $f_2(n) = n + 1$ modulo 2 (qui est aussi l'indicatrice de l'ensemble des entiers pairs).

Question 4.2 : Décrire $L(f_2)$ par une expression rationnelle de la forme $\alpha(bab + a + b)\beta$, où α et β sont des expressions rationnelles à déterminer. Justifier la réponse.

Question 4.3 : Dessiner un automate non nécessairement déterministe reconnaissant le langage décrit par l'expression rationnelle $bab + a + b$. Cet automate devra nécessairement posséder un seul état initial et un seul état final.

Question 4.4 : En s'appuyant sur l'expression rationnelle obtenue à la question 2, compléter l'automate obtenu à la question précédente pour obtenir un automate non déterministe reconnaissant le langage $L(f_2)$. Cet automate devra nécessairement posséder un seul état initial et un seul état final.

Question 4.5 : Déterminer l'automate obtenu à la question précédente. On utilisera un algorithme vu en cours et on ne fera apparaître que les états accessibles depuis l'état initial.

Question 4.6 : Montrer que si f n'est pas majorée par une constante, alors $L(f)$ n'est pas rationnel.

Question 4.7 : On considère le langage $L_ =$ sur Σ défini par $L_ = = \{u \in \Sigma^*, |u|_a = |u|_b\}$. Le langage $L_ =$ est-il rationnel ?

Question 4.8 : On considère le langage $L_ \leq$ sur Σ défini par $L_ \leq = \{u \in \Sigma^*, |u|_a \leq |u|_b\}$. Le langage $L_ \leq$ est-il rationnel ? On utilisera le résultat de la question précédente.

Question 4.9 : On considère le langage $L_ <$ sur Σ défini par $L_ < = \{u \in \Sigma^*, |u|_a < |u|_b\}$. Le langage $L_ <$ est-il rationnel ? On utilisera le résultat de la question précédente.

Question 4.10 : Montrer que la réciproque de la proposition énoncée dans la question 6 est fautive.

Indication : on pourra admettre que le langage des mots de la forme b^n où b est une lettre et n est un entier premier n'est pas rationnel.